Préparation mathématico-sportive pour la classe de seconde (corrigé)

J - 3

Exercice 1 :

$a)\ A = 15 - 4 \times 12$

$= 15 - 48$

$= -33$

$B = 5 \times 6 - (7 - 17)$

$= 30 - (-10)$

$= 30 + 10$

$= 40$

Les priorités de calculs :

1) les parenthèses
2) les multiplications et divisions
3) les additions et soustractions

$C = 2 + \frac{5}{8}$

$= \frac{2}{1} + \frac{5}{8}$

$= \frac{2 \times 8}{1 \times 8} + \frac{5}{8}$

$= \frac{16}{8} + \frac{5}{8}$

$= \frac{21}{8}$

$D = \frac{5}{3} - \frac{9}{4}$

$= \frac{5 \times 4}{3 \times 4} - \frac{9 \times 3}{4 \times 3}$

$= \frac{20}{12} - \frac{27}{12}$

$= \frac{20 - 27}{12}$

$= -\frac{7}{12}$

Pour ajouter ou soustraire 2 fractions :

- On doit les réduire au même dénominateur
- On ajoute ou on soustrait les numérateurs en gardant le dénominateur commun

⚠ Il ne faut pas oublier, si nécessaire, de simplifier au maximum la fraction finale.

b) Je calcule $E = 2x + 4$ pour $x = -5$:

$E = 2 \times (-5) + 4$
$= -10 + 4$
$= -6$

Pour calculer une expression pour une valeur donnée, on remplace la lettre par cette valeur (en n'oubliant pas de faire apparaitre les signes opératoires sous-entendus)

Je calcule $F = 5x^2 - 3$ pour $x = -1$:

$F = 5 \times (-1)^2 - 3$
$= 5 \times 1 - 3$
$= 5 - 3$
$= 2$

Penser à placer les parenthèses« autour » de -1

Exercice 2 :

a) Réduction :

$G = -3x - 5x$ $= -8x$	$H = 2x^2 - x^2$ $= 2x^2 - 1x^2$ $= x^2$	$I = 3y + 4y^2$ pas de réduction possible	$J = 7a \times 5$ $= 7 \times 5 \times a$ $= 35a$	$K = -6 \times 2x^2$ $= -6 \times 2 \times x^2$ $= -12x^2$	$L = 3x \times (-7x)$ $= 3 \times (-7) \times x \times x$ $= -21x^2$

b) **Suppression de parenthèses précédées d'un signe + ou - :**

$(3x+5)+(x^2-6)$	$3x-5+x^2-6$
$(-3x+5)-(x^2-6)$	$3x+5-x^2+6$
$(3x+5)-(x^2-6)$	$3x+5+x^2-6$
$-(3x+5)-(x^2-6)$	$-3x-5-x^2+6$
$(3x-5)+(x^2-6)$	$-3x+5-x^2+6$

Si une parenthèse est précédée du signe +, on peut supprimer les parenthèses sans rien changer.

Si une parenthèse est précédée du signe -, on peut supprimer les parenthèses à condition de changer tous les signes des termes de la parenthèse.

b) Développement et réduction:

$M = 6 \times (x - 5)$
$= 6 \times x - 6 \times 5$
$= 6x - 30$

$N = -4x(2x - 6)$
$= -4x \times 2x - (-4x) \times 6$
$= -8x^2 + 24x$

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

$O = (x + 7)(x + 8)$
$= x \times x + x \times 8 + 7 \times x + 7 \times 8$
$= x^2 + 8x + 7x + 56$
$= x^2 + 15x + 56$

$P = (3x - 2)(x - 4)$
$= 3x \times x + 3x \times (-4) - 2 \times x - 2 \times (-4)$
$= 3x^2 - 12x - 2x + 8$
$= 3x^2 - 14x + 8$

$k \times a + k \times b = k(a + b)$

c) Factorisation :

$Q = 8x + 8y$
$= 8 \times x + 8 \times y$
$= 8 \times (x + y)$

$R = 5x^2 - 16x$
$= 5 \times x \times x - 16 \times x$
$= x \times (5 \times x - 16)$
$= x(5x - 16)$

$S = 7a - 7$
$= 7 \times a - 7 \times 1$
$= 7 \times (a - 1)$
$= 7(a - 1)$

$T = 6 - 15y$
$= 3 \times 2 - 3 \times 5 \times y$
$= 3 \times (2 - 5 \times y)$
$= 3(2 - 5y)$

e) Equations :

$3x = 7$
$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{7}{3}$
$x = \frac{7}{3}$

La solution de l'équation est $\frac{7}{3}$

(La solution exacte ne peut s'écrire que sous forme fractionnaire -on parle de nombre rationnel-, on peut seulement donner une valeur approchée sous forme décimale)

$12 + 5x = 6$
$\cancel{12} + 5x \cancel{-12} = 6 - 12$
$5x = -6$
$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{-6}{5}$
$x = -1{,}2$

La solution est $-1{,}2$

$2x + 8 = 5x + 2$
$2x + 8 - 5x = 5\cancel{x} + 2 \cancel{-5x}$
$-3x + 8 = 2$
$-3x \cancel{+8} \cancel{-8} = 2 - 8$
$-3x = -6$
$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} = \frac{-6}{-3}$
$x = 2$

La solution est 2

Etapes de résolution des équations du 1er degré

- On développe et on réduit si nécessaire les 2 membres de l'égalité
- On regroupe les inconnues du même côté de l'égalité
- On supprime les additions ou les soustractions
- On supprime les multiplications et les divisions

Exercice 3 :

$\times 10$ $\boxed{170 + 1\ 700 = 1\ 870}$ $\boxed{\text{Produit en croix}}$

Distance parcourue par le son dans l'air (en mètre)	170	1 700	1 870	170×3 $= 510$	$\frac{3\ 600 \times 170}{0,5}$ $= 1\ 224\ 000$ $(= 1\ 224\ km)$
Temps pour parcourir cette distance (en seconde)	0,5	$0,5 \times 10$ $= 5$	$0,5 + 5$ $= 5,5$	1,5	3 600 (= 1 heure)

$\times 3$

En utilisant la dernière colonne du tableau on peut donc dire que la vitesse du son est de 1 224 km/h.

Pour convertir en m/s :

$$1\ 224 \text{ km/h} \xrightarrow{\times 1\ 000} 1\ 224\ 000 \text{ m/h} \xrightarrow{\div 3\ 600} 340 \text{ m/s}$$

car 1 km = 1 000 m car 1 h = 3 600 s

La vitesse du son est donc de 340 m/s.

(*remarque :* pour trouver la vitesse en m/s, on pouvait également multiplier par 2 les données de départ : 170 m en 0,5 seconde donc $2 \times 170 = 340$ m en $2 \times 0,5 = 1s$)

J - 2

Exercice 1 :

a) $A = (14 - 12) \times 8 - 4 \times 9$

$= 2 \times 8 - 4 \times 9$

$= 16 - 36$

$= -20$

$B = (2 \times 15) \div (8 - 12) \times 5$

$= 30 \div (8 - 12) \times 5$

$= 30 \div (-4) \times 5$

$= -7{,}5 \times 5$

$= -37{,}5$

Attention aux PRIORITES des opérations ...

$$C = \frac{11}{8} - \frac{7}{6} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{11 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 4}{6 \times 4} + \frac{3 \times 6}{4 \times 6}$$

$$= \frac{33}{24} - \frac{28}{24} + \frac{18}{24}$$

$$= \frac{33 - 28 + 18}{24}$$

$$= \frac{23}{24}$$

Dénominateur commun :
On cherche un multiple commun (souvent le plus petit) aux trois dénominateurs : 8 ; 6 et 4.

$$D = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{7}$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{2 \times 15}{5 \times 7}$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{2 \times 3 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 7}$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{6}{7}$$

$$= \frac{7 \times 7}{10 \times 7} - \frac{6 \times 10}{7 \times 10}$$

$$= \frac{49}{70} - \frac{60}{70}$$

$$= \frac{49 - 60}{70}$$

$$= \frac{-11}{70}$$

Pour multiplier 2 fractions :

- On multiplie les numérateurs entre eux (en simplifiant si possible avant d'effectuer la multiplication)
- On multiplie les dénominateurs entre eux

b) $E = (3x - 7)(-8x + 3)$ pour $x = -4$

$= (3 \times (-4) - 7)(-8 \times (-4) + 3)$

$= (-12 - 7)(32 + 3)$

$= (-19) \times 35$

$= -665$

Exercice 2 :

a)

$F = (-4x)^2$ $= (-4x) \times (-4x)$ $= 16x^2$	$G = -6x \times (-3x)$ $= 18x^2$	$H = (3x)^2$ $= 3x \times 3x$ $= 9x^2$
$I = -11x - 3x$ $= -14x$	$J = -9 \times (-3x)$ $= 27x$	$K = -4 \times 3x + 2x \times 5x + 7 - 4x$ $= -12x + 10x^2 + 7 - 4x$ $= 10x^2 - 16x + 7$

Le produit de 2 nombres négatifs est un nombre positif

On réduit d'abord les produits puis les sommes.

b) **Développement simple et double**

$$L = 7 - 6x\,(x + 9)$$
$$= 7 - 6x \times x - 6x \times 9$$
$$= 7 - 6x^2 - 54x$$

$$M = 7(x - 4) - 3(x + 4)$$
$$= 7 \times x + 7 \times (-4) - 3 \times x - 3 \times 4$$
$$= 7x - 28 - 3x - 12$$
$$= 4x - 40$$

$$N = (-4x + 3)(6x - 9)$$
$$= -4x \times 6x - 4x \times (-9) + 3 \times 6x + 3 \times (-9)$$
$$= -24x^2 + 36x + 18x - 27$$
$$= -24x^2 + 54x - 27$$

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$
$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

c) **Factorisation :**

$O = 4a^2 + 12a$	$P = 7x^2 - 14x$	$Q = x^2 - 16$	$R = 9y^2 - 25$
$= 4 \times a \times a + 3 \times 4 \times a$	$= 7 \times x \times x - 2 \times 7 \times x$	$= x^2 - 4^2$	$= (3y)^2 - 5^2$
$= 4 \times a \times (a + 3)$	$= 7 \times x \times (x - 2)$	$= (x - 4)(x + 4)$	$= (3y - 5)(3y + 5)$
$= 4a\,(a + 3)$	$= 7x\,(x - 2)$		

Factorisation avec un facteur commun :

$$k \times a + k \times b = k(a + b)$$

Factorisation avec une identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

d) **Equations:**

$$-5x + 9 = -2x + 8$$
$$-5x + 9 + 2x = \cancel{-2x} + 8 \cancel{+2x}$$
$$-3x + 9 = 8$$
$$-3x \cancel{+9} \cancel{-9} = 8 - 9$$
$$-3x = -1$$
$$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} = \frac{-1}{-3}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

La solution est $\frac{1}{3}$

$$x^2 = 144$$

$x = \sqrt{144}$ et $x = -\sqrt{144}$

C'est-à-dire

$x = 12$ et $x = -12$

Les deux solutions sont 12 et -12

$$2x^2 - 9 = 63$$
$$2x^2 \cancel{-9} \cancel{+9} = 63 + 9$$
$$2x^2 = 72$$
$$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = \frac{72}{2}$$
$$x^2 = 36$$

$x = \sqrt{36}$ et $x = -\sqrt{36}$

C'est-à-dire

$x = 6$ et $x = -6$

Les deux solutions sont 6 et -6

Les solutions des équations du type $x^2 = a$ sont :

- Si a > 0 : 2 solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$
- Si a = 0 : 1 solution $x = 0$
- Si a < 0 : il n'y a pas de solutions

e) **Equations produit nul :**

$(x - 9)(-2x + 7) = 0$

Si un produit est nul alors l'un des facteurs au moins est nul

$$x - 9 = 0$$
$$x \cancel{-9} \cancel{+9} = 0 + 9$$
$$x = 9$$

$$-2x + 7 = 0$$
$$-2x \cancel{+7} \cancel{-7} = 0 - 7$$
$$-2x = -7$$
$$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} = \frac{-7}{-2}$$
$$x = 3{,}5$$

Les deux solutions sont 9 et 3,5

$5x(3x - 12) = 0$

Si un produit est nul alors l'un des facteurs au moins est nul

$$5x = 0$$
$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{0}{5}$$
$$x = 0$$

$$3x - 12 = 0$$
$$3x \cancel{-12} \cancel{+12} = 0 + 12$$
$$3x = 12$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Les deux solutions sont 0 et 4

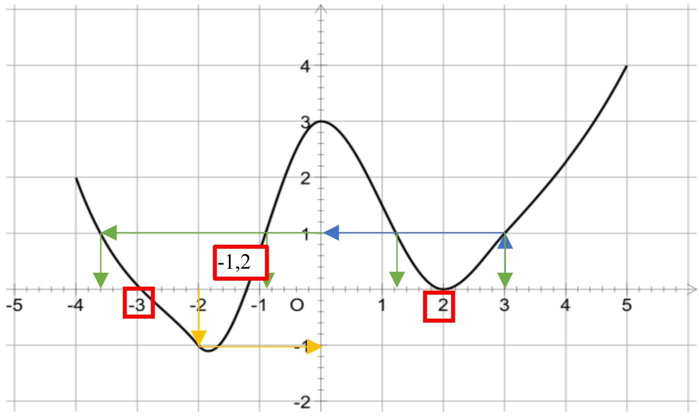
Exercice 3 :

1. L'image du nombre 3 par la fonction f est 1
2. $f(-2) = -1$
3. Les antécédents du nombre 0 par la fonction f sont :

$-3, -1{,}2$ *et* 2

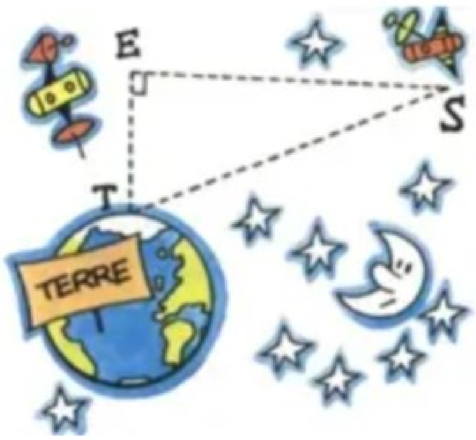
4. L'équation $f(x) = 1$ admet 4 solutions :

environ $-3{,}6$; $-0{,}9$; $1{,}2$ *et* 3



Exercice 4 :

La vitesse du signal radio est : 300 000 km/s (en 1s, le signal parcourt 300 000 km)



Le signal radio met $\frac{1}{60}$ de seconde de S à T

donc la distance entre S et T est : $\frac{1}{60} \times 300\,000 = 5\,000\ km$

De même la distance entre E et T est : $\frac{1}{100} \times 300\,000 = 3\,000\ km$

Le triangle EST est rectangle en E

D'après le théorème de Pythagore : $ST^2 = ES^2 + ET^2$

$$5\,000^2 = ES^2 + 3\,000^2$$
$$25\,000\,000 = ES^2 + 9\,000\,000$$
$$ES^2 = 25\,000\,000 - 9\,000\,000$$
$$ES^2 = 16\,000\,000$$
$$ES = \sqrt{16\,000\,000}$$
$$ES = 4\,000$$

La distance entre les 2 satellites est donc de 4 000 km.

J – 1

Exercice 1 :

a) $A = \frac{(-21)+7\times3}{(-13)+17\times(-4)}$

$= \frac{-21+21}{-13-68}$

$= \frac{0}{-81}$

$= 0$

b) $B = 2x^2 - 5x + 18$

pour $x = -3$

$B = 2\times(-3)^2 - 5\times(-3) + 18$

$= 2\times9 - 5\times(-3) + 18$

$= 18 - 5\times(-3) + 18$

$= 18 + 15 + 18$

$= 51$

pour $x = 5$

$B = 2\times5^2 - 5\times5 + 18$

$= 2\times25 - 5\times5 + 18$

$= 50 - 5\times5 + 18$

$= 50 - 25 + 18$

$= 43$

Exercice 2 :

a) **Développement et réduction :**

$C = -11x^2 + 6 - 8x + 7x^2 - 6x - 4$

$= -11x^2 + 7x^2 - 8x - 6x + 6 - 4$

$= -4x^2 - 14x + 2$

$D = (x-1)(3x+7) - 4(3x-7)$

$= x\times3x + x\times7 - 1\times3x - 1\times7 - 4\times3x - 4\times(-7)$

$= 3x^2 + 7x - 3x - 7 - 12x + 28$

$= 3x^2 - 8x + 21$

$E = 2 + 3x^2 + (-4x^2 + x) - (-2x + 8x) - (6x - 9)$

$= 2 + 3x^2 - 4x^2 + x + 2x - 8x - 6x + 9$

$= -x^2 - 11x + 11$

b) Factorisation

$F = (x+1)^2 + (x+1)(5x+6)$

$= (x+1)\times(x+1) + (x+1)\times(5x+6)$

$= (x+1)\times[(x+1) + (5x+6)]$

$= (x+1)\times[x+1+5x+6]$

$= (x+1)(6x+7)$

$G = (x+1)(5-x) + (x+1)(3+5x)$

$= (x+1)\times(5-x) + (x+1)\times(3+5x)$

$= (x+1)\times[(5-x)+(3+5x)]$

$= (x+1)\times[5-x+3+5x]$

$= (x+1)(8+4x)$

c) **Equations :**

$$2(4x-5)=4+x$$
$$2\times 4x+2\times(-5)=4+x$$
$$8x-10=4+x$$
$$8x-10-x=4+\cancel{x}-\cancel{x}$$
$$7x-10=4$$
$$7x-\cancel{10}+\cancel{10}=4+10$$
$$7x=14$$
$$\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}}=\frac{14}{7}$$
$$x=2$$

La solution est 2

$$x^2-9=55$$
$$x^2\cancel{-9}\cancel{+9}=55+9$$
$$x^2=64$$
$$x=\sqrt{64}\ \text{ et }\ x=-\sqrt{64}$$

C'est-à-dire

$$x=8\ \text{ et }\ x=-8$$

Les deux solutions sont

8 et – 8

$$\frac{2}{5}=\frac{x}{4}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{x-2}{7}$$

Produit en croix :

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a\times d=b\times c$

$$2\times 4=5\times x$$
$$8=5x$$
$$\frac{8}{5}=\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}$$
$$x=1{,}3$$

La solution est 1,3

$$5\times 7=6\times(x-2)$$
$$35=6\times x+6\times(-2)$$
$$35=6x-12$$
$$35+12=6x-\cancel{12}+\cancel{12}$$
$$47=6x$$
$$\frac{47}{6}=\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}$$
$$x=\frac{47}{6}$$

La solution est $\frac{47}{6}$

Remarque : il y d'autres méthodes permettant d'aboutir à la solution pour ces 2 dernières équations.

d) Programme de calcul :

• Choisir un nombre • Elever au carré • Soustraire 9	• 6 • $6^2=36$ • $36-9=27$	• -8 • $(-8)^2=64$ • $64-9=55$	• x • x^2 • x^2-9

2. Donc l'expression littérale associée au programme de calcul est x^2-9

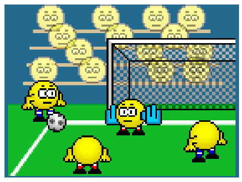
3. Pour obtenir 27, on doit résoudre l'équation : $x^2-9=27$

$$x^2-9+9=27+9$$
$$x^2=36$$

$x=\sqrt{36}$ et $x=-\sqrt{36}$ C'est-à-dire $x=6$ et $x=-6$

Les deux solutions sont 6 et – 6

Remarque : on peut également « remonter » le programme de calcul c'est-à-dire inverser les étapes du programme ainsi que les opérations : on ajoute 9 (27+9=36) puis on prend la racine carrée.



Exercice 3 : Fonction $g: x \to 3x^2 - 2$

a) Image de -5 par la fonction g : $g(-5) = 3 \times (-5)^2 - 2$

$= 3 \times 25 - 2$

$= 75 - 2$

$= 73$ L'image de -5 par la fonction g est 73

b) Le nombre 2 est-il un antécédent du nombre 7 ? Autrement dit le nombre 7 est-il l'image du nombre 2 ?

$g(2) = 3 \times 2^2 - 2$

$= 3 \times 4 - 2$

$= 10$

$\neq 7$ Donc le nombre 2 n'est pas un antécédent du nombre 7

c) Déterminer le(s) antécédent(s) de 1 par la fonction g revient à résoudre l'équation $3x^2 - 2 = 1$

$$3x^2 - 2 = 1$$

$$3x^2 - \cancel{2} + \cancel{2} = 1 + 2$$

$$3x^2 = 3$$

$$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = \frac{3}{3}$$

$$x^2 = 1$$

$x = \sqrt{1}$ et $x = -\sqrt{1}$ C'est-à-dire $x = 1$ et $x = -1$

Donc les antécédents de 1 par la fonction g sont 1 et -1

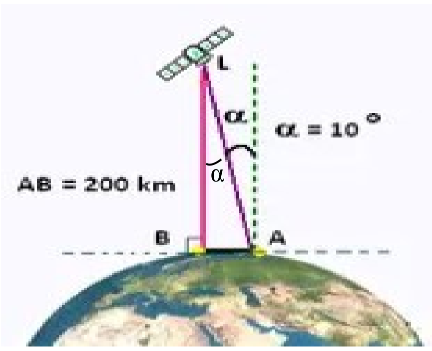
d) $g(\sqrt{2}) = 3 \times \sqrt{2}^2 - 2$

$= 3 \times 2 - 2$

$= 6 - 2$

$= 4$

Exercice 4 :



Le triangle ABL est rectangle en B

D'après la trigonométrie : $\tan \widehat{BLA} = \dfrac{\text{coté opposé à } \widehat{BLA}}{\text{coté adjacent à } \widehat{BLA}} = \dfrac{AB}{BL}$

$$\tan 10° = \frac{200}{BL}$$

$$BL = \frac{200}{\tan 10°}$$

$$\approx 1134$$

Le satellite est à environ 1 134 km de l'observateur se trouvant au point B.